

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
FACULTÉS DES SCIENCES ET TECHNIQUES

MÉMOIRE DE STAGE M2

Matroïdes et théorie des jeux

Projet présenté par :
Kévin PLANOLLES

Professeur encadrant :
Émeric GIOAN

24 juin 2020

Préambule. La théorie des jeux a pour but l'analyse des situations interactives, c'est à dire des situations où ce que l'on appelle des "joueurs" prennent des décisions qui les affectent mutuellement. La nature de ces joueurs n'est pas précisé dans l'analyse mathématique, mais de nombreuses situations de la vie réelle peuvent s'exprimer de cette manière. Par exemple, de nombreux récipiendaires du Prix Nobel d'Économie ont travaillé sur la théorie des jeux. La recherche des "meilleures décisions possibles", en un sens qui sera précisé dans le développement de ce document, est fondamentale en théorie des jeux. Nous nous proposons ici d'étudier quelques résultats de cette recherche lorsque le contexte fait intervenir la structure combinatoire des *matroïdes*. Nous présentons d'abord les outils de la théorie des jeux qui seront utilisés ici, puis nous étudierons deux types de jeux : en premier lieu un *jeu à somme nulle*, à deux joueurs, dans lequel un des joueurs choisit un élément d'un ensemble, et l'autre joueur choisit simultanément une base d'un matroïde sur cet ensemble. Le premier joueur "gagne" si l'élément qu'il a choisi appartient à la base choisie par le second, qui est donc "perdant". Dans un deuxième temps, nous étudierons un *jeu de congestion*, avec un nombre arbitraire de joueurs. Ceux-ci ont un ensemble de ressources à disposition, dont ils doivent choisir un certain sous-ensemble, avec un coût associé à chaque ressource. Cependant, plus de joueurs choisissent une même ressource, plus important est le coût de ce choix pour eux. Le cas particulier que nous étudions est celui où le sous-ensemble des ressources à choisir est une base d'un matroïde sur l'ensemble des ressources.

Nous utilisons essentiellement trois articles dans ce document : *Security games on matroids* de Dávid Szegál, *Pure Nash equilibria in player-specific and weighted congestion games* de Heiner Ackermann, Heiko Röglin et Berthold Vöcking, et *Ressource congestion on integral polymatroid* de Tobias Hark, Max Klimm et Britta Peis.

Chapitre 1

Notions préliminaires de théories des jeux

Sauf mention contraire, tous les résultats et définitions sont tirés de [3].

Définition 1 (Jeu sous forme normale). Soit $n \geq 2$.

Un *jeu* est un quintuplet $\langle J, (S_1, \dots, S_n), O, f, (\succsim_1, \dots, \succsim_n) \rangle$ où :

- J est un ensemble de *joueurs*, identifié à l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$;
- S_i est un ensemble fini de *stratégies* associé au joueur i pour tout $1 \leq i \leq n$;
- O est un ensemble *d'issues* ;
- $f : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \mapsto O$ est une fonction qui associe à chaque n -uplet de stratégies une issue ;
- $\succsim_i$ est une relation totale et transitive sur O pour tout $1 \leq i \leq n$.

Notations. Par la suite, on notera S le produit cartésien $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$. Pour un joueur i , on notera S_{-i} le produit cartésien $S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$. Les éléments de ce produit cartésien sont appelés des *profils stratégiques*. Pour un profil stratégique $s := (s_1, \dots, s_n)$ quelconque, on note (t_i, s_{-i}) le profil stratégique $(s_1, \dots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$ obtenu à partir de s en remplaçant la stratégie du joueur i par t_i et en laissant les autres inchangées.

Définition 2 (Fonction de gain). Soit $\langle J, (S_1, \dots, S_n), O, f, (\succsim_1, \dots, \succsim_n) \rangle$ un jeu. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on définit une fonction $g_i : S \mapsto \mathbb{R}$, appelée *fonction de gain*, qui vérifie :

$$g_i(s) \geq g_i(s') \iff f(s) \succsim_i f(s'), \forall s, s' \in S \quad (1.1)$$

Définition 3 (Jeu sous forme réduite). Soit

$\mathcal{J} := \langle J, (S_1, \dots, S_n), O, f, (\succsim_1, \dots, \succsim_n) \rangle$ un jeu, et $(g_1, \dots, g_n)$ un n -uplet de fonctions de gain. Le triplet $\langle J, (S_1, \dots, S_n), (g_1, \dots, g_n) \rangle$ est appelé la *forme réduite* de $\mathcal{J}$.

Définition 4 (Équilibre de Nash pour deux joueurs). Soit $\langle J, (S_1, S_2), (g_1, g_2) \rangle$ un jeu à deux joueurs. Un profil stratégique $(s_1^*, s_2^*) \in S_1 \times S_2$ est un *équilibre de Nash* lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout $s_1 \in S_1, g_1(s_1^*, s_2^*) \geq g_1(s_1, s_2^*)$;
2. Pour tout $s_2 \in S_2, g_2(s_1^*, s_2^*) \geq g_2(s_1^*, s_2)$;

Exemple 1 (Dilemme du prisonnier). Deux criminels sont arrêtés et mis à l'isolement (ils ne peuvent pas communiquer). Les enquêteurs n'ont pas assez de preuves pour inculper les deux prisonniers pour le crime commis mais ils peuvent les inculper chacun pour un délit mineur. Ils proposent aux prisonniers un marché. Chacun des prisonniers peut trahir l'autre et témoigner en son encontre, ou coopérer en gardant le silence. Les issues sont les suivantes :

- Si les deux prisonniers restent silencieux, ils effectuent un an pour le délit mineur.
- Si un seul des deux témoigne, il est libéré, et celui qui est resté silencieux effectue trois ans de prison.
- Si les deux témoignent, ils effectuent chacun deux ans de prison.

On fait la supposition que chaque criminel veut minimiser son nombre d'années en prison. Formalisons cette situation dans le cadre de la théorie des jeux. Les joueurs sont les prisonniers, appelons-les A et B . Chacun à deux stratégies : trahir, ou rester silencieux.

Donc $S_A = S_B = \{\text{"trahir"}, \text{"coopérer"}\}$. L'ensemble d'issues O est : $\{\text{"A et B font un an de prison"}, \text{"A est libéré et B fait trois ans de prison"}, \text{"B est libéré et A fait trois ans de prison"}, \text{"A et B font deux ans de prison"}\}$. Ces issues seront nommées o_1, o_2, o_3, o_4 dans l'ordre. La fonction f est définie ainsi :

$$\begin{aligned}
 f : \quad S_A \times S_B & \mapsto O \\
 (\text{"coopérer"}, \text{"coopérer"}) & \mapsto o_1 \\
 (\text{"trahir"}, \text{"coopérer"}) & \mapsto o_2 \\
 (\text{"coopérer"}, \text{"trahir"}) & \mapsto o_3 \\
 (\text{"trahir"}, \text{"trahir"}) & \mapsto o_4
 \end{aligned}$$

Pour l'ordre, il ne diffère que sur les issues o_2 et o_3 .

$$o_2 \succeq_A o_1 \succeq_A o_4 \succeq_A o_3$$

$$o_3 \succeq_B o_1 \succeq_B o_4 \succeq_B o_2$$

On met ce jeu sous forme réduite en prenant pour fonctions de gain g_A, g_B les durées d'emprisonnement possibles des joueurs, par exemple $g_A(o_2) = 0$ et $g_B(o_2) = 3$. De cette façon l'équivalence 1.1 est vérifiée par construction. Dans ce jeu, l'équilibre de Nash est le profil stratégique où les deux prisonniers choisissent de trahir.

On a de manière générale la définition suivante d'un équilibre de Nash :

Définition 5 (Équilibre de Nash). Soit $\langle J, (S_1, \dots, S_n), (g_1, \dots, g_n) \rangle$ un jeu. Un profil stratégique $s^* := (s_1^*, \dots, s_n^*) \in S$ est un *équilibre de Nash* si, pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$\forall s_i \in S_i, g_i(s^*) \geq g_i(s_i, s_{-i}^*)$$

Les deux définitions à suivre sont inspirées de [10] et [1].

Définition 6 (Jeu à somme nulle). Soit $\mathcal{J} := \langle J, (S_1, \dots, S_n), (g_1, \dots, g_n) \rangle$ un jeu. On dit que $\mathcal{J}$ est un *jeu à somme nulle* lorsque pour tout profil stratégique $s \in S$ on a :

$$\sum_{i=1}^n g_i(s) = 0$$

On peut donner une formulation matricielle d'un jeu à deux joueurs. Si S_i est l'ensemble des stratégies du joueur i , on peut poser G_i la matrice de gain du joueur i de cette façon :

$$G_i = (g(s_k, s_l))_{\substack{1 \leq k \leq |S_i| \\ 1 \leq l \leq |S_{-i}|}}$$

Dans le cas d'un jeu à somme nulle, on a $G_1 = -^t G_2$.

Définition 7 (Valeur d'un jeu). Soit $\mathcal{J} := \langle J, (S_1, S_2), (g_1, g_2) \rangle$ un jeu à somme nulle et $s^* \in S$ un équilibre de Nash, s'il existe. Le réel $|g_1(s^*)| = |g_2(s^*)|$ est appelé *valeur de $\mathcal{J}$* .

Définition 8 (Extension d'un jeu aux stratégies mixtes). Soit $\mathcal{J} := \langle J, (S_1, \dots, S_n), (g_1, \dots, g_n) \rangle$ un jeu. Pour chaque i , soit Σ_i l'ensemble des distributions de probabilité sur S_i , appelé ensemble des *stratégies mixtes*. Pour $\sigma_i \in \Sigma_i$ et $s \in S_i$, $\sigma_i(s_i)$ est ainsi la probabilité que σ_i associe à s_i . Le produit cartésien $\Sigma := \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_n$ est appelé l'ensemble des *profils stratégiques mixtes*. Pour $\sigma \in \Sigma$ et $s \in S$, on note $\sigma(s)$ le produit $\prod_{i=1}^n \sigma_i(s_i)$. Pour chaque i , on définit :

$$\begin{aligned} \Pi_i : \Sigma &\mapsto \mathbb{R} \\ \sigma &\mapsto \sum_{s \in S} \sigma(s) g_i(s) \end{aligned}$$

Ainsi, pour $\sigma \in \Sigma$, $\Pi_i(\sigma)$ est l'espérance de gain du joueur i . Le triplet $\langle J, (\Sigma_1, \dots, \Sigma_n), (\Pi_1, \dots, \Pi_n) \rangle$ est appelé *l'extension aux stratégies mixtes de $\mathcal{J}$* .

Définition 9 (Équilibre de Nash pour les stratégies mixtes). La définition d'un équilibre de Nash s'étend naturellement aux extensions aux stratégies mixtes. Avec les notations de la définition précédente, un profil stratégique mixte $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$ est un équilibre de Nash si, pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$\forall \sigma_i \in \Sigma_i, \Pi_i(\sigma^*) \geq \Pi_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*)$$

Remarque 1. Les jeux étendus aux stratégies mixtes englobent les jeux où le nombre de stratégies est fini ; on peut en effet voir ces derniers comme l'assignation d'une probabilité 1 à une stratégie particulière et 0 aux autres.

Voyons un exemple de jeu sans équilibre de Nash en stratégie pure, et comment l'extension aux stratégies mixtes permet de résoudre le jeu.

Exemple 2 (Pierre-Feuille-Ciseaux). On considère le jeu bien connu à deux joueurs Pierre-Feuille-Ciseaux, dont les gains sont donnés par le Tableau 1.1. Le tableau se lit de la façon suivante : pour le profil stratégique (P,F), le gain du joueur 1 est 1 et le gain du joueur 2 est -1 . Aucune stratégie pure ne permet un équilibre de Nash. L'unique stratégie mixte de ce jeu est le profil stratégique où les deux joueurs choisissent la distribution de probabilité uniforme, autrement dit jouent chaque figure avec une probabilité de $\frac{1}{3}$. La valeur du jeu est alors de 0.

1 2	P	F	C
P	0, 0	1, -1	-1, 1
F	-1, 1	0, 0	1, -1
C	-1, 1	1, -1	0, 0

TABLE 1.1 – Matrice de gain du joueur 1

Théorème 1 (Théorème du minimax de Von Neumann). *Pour $m \in \mathbb{N}^*$, soit Δ_m l'ensemble des vecteurs colonnes de $\mathbb{R}_+^m$ dont la somme des composantes vaut 1. Soit $A \in M_{n,k}(\mathbb{R})$. Alors, l'identité suivante est vérifiée :*

$$\max_{X \in \Delta_k} \min_{Y \in \Delta_n} {}^tYAX = \min_{Y \in \Delta_n} \max_{X \in \Delta_k} {}^tYAX$$

Remarque 2. Ce théorème s'interprète de la façon suivante : dans un jeu à somme nulle avec deux joueurs, un joueur J regarde, pour chacune des stratégies qu'il peut jouer, le gain qu'il peut espérer dans le cas le moins favorable. Il choisit alors la stratégie qui lui offre le gain maximum, il *maximise donc son gain minimum*. Cela revient à minimiser le gain maximum de l'adversaire. La valeur du minimax est égal à la valeur du jeu (le profil stratégique correspondant est un équilibre de Nash). Voir [11].

Théorème 2 (Nash, 1950). *Soit*

$\bar{\mathcal{J}} := \langle J, (\Sigma_1, \dots, \Sigma_n), (\Pi_1, \dots, \Pi_n) \rangle$ *l'extension d'un jeu aux stratégies mixtes. Alors, $\bar{\mathcal{J}}$ possède au moins un équilibre de Nash.*

Remarque 3. On ne connaît pas d'algorithme polynomial pour calculer un équilibre de Nash dans le cas général. Cependant, dans le cas d'un jeu à somme nulle où $n=2$, un équilibre de Nash peut être formulé comme la solution d'un programme linéaire, qui peut alors être résolu en temps polynomial.

Chapitre 2

Jeux sur les bases d'un matroïde

Ce chapitre, à l'exception des exemples, est intégralement basé sur [9]. Nous avons détaillé la preuve du Théorème 5 et l'avons séparé en plusieurs corollaires et propositions pour mettre l'accent sur chacun des résultats. L'exemple des réseaux de communication est inspiré de [6]. On utilisera ici les notions de **jeu à somme nulle** et de **stratégie mixte**.

2.1 Définition

Théorème 3. Soit $\mathcal{M} := (E, \mathcal{B})$ un matroïde d'ensemble de bases $\mathcal{B}$, $d : E \mapsto \mathbb{R}^+$ une fonction réelle positive et $c : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soit $J := \{A, D\}$, $S_A = E$, $S_D = \mathcal{B}$ et $g_A, g_D : S_A \times S_D \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que :

$$\begin{cases} g_A(e, B) = d(e) - c(e), & g_D(e, B) = c(e) - d(e), & \text{si } e \in B \\ g_A(e, B) = -c(e), & g_D(e, B) = c(e), & \text{si } e \notin B \end{cases}$$

alors, $\langle J, (S_A, S_D), (g_A, g_D) \rangle$ est un jeu à somme nulle.

Démonstration. Il faut prouver l'existence d'un ensemble O muni de deux relations $\succsim_A, \succsim_D$ totales et transitives et d'une fonction $f : S_A \times S_D \mapsto O$ qui vérifie (1.1).

On pose donc $O = \{0, 1\}$ et, pour $(e, B) \in S_A \times S_D$, $f(e, B) = \chi_B(e)$. On munit O des relations :

$$0 \succsim_D 0; 0 \succsim_D 1; 1 \succsim_D 1 \text{ et } 1 \succsim_A 1; 1 \succsim_A 0; 0 \succsim_A 0.$$

L'équivalence (1.1) est alors vérifiée par construction. Il est évident que le jeu est à somme nulle. $\square$

2.2 Exemples, avec et sans équilibre de Nash

Voyons un exemple où il existe un équilibre de Nash.

Exemple 3. Soit $E = 1, 2$ et $U_{1,2}$ le matroïde uniforme de rang 1 sur E . L'ensemble des stratégies du joueur A est donc E , l'ensemble des stratégies du joueur D est l'ensemble $\{\{1\}, \{2\}\}$, c'est à dire l'ensemble des bases de $U_{1,2}$. On pose $d(1) = 2, d(2) = 0$ et $c(1) = 1, c(2) = 0$. Le Tableau 2.1 présente les gains des deux joueurs pour chaque profil stratégique. Dans cet

	$\{1\}$	$\{2\}$
1	1,-1	-1,1
2	0,0	0,0

TABLE 2.1 – Tableau des gains d'un jeu avec équilibre de Nash

exemple, l'équilibre de Nash correspond au profil stratégique $(2, \{2\})$, d'après la définition 4.

Voyons maintenant un exemple où il n'existe pas d'équilibre de Nash.

Exemple 4. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $U_{2,4}$ le matroïde uniforme de rang 2 sur E . L'ensemble des stratégies du joueur A est E , l'ensemble des stratégies du joueur D est l'ensemble des bases de $U_{2,4}$. Les fonctions d et c sont définies comme suit :

$$\begin{array}{ll}
 d(1) = 1 & c(1) = 0 \\
 d(2) = 2 & c(2) = 1 \\
 d(3) = 1 & c(3) = 0 \\
 d(4) = 2 & c(4) = 1
 \end{array}$$

	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3\}$	$\{2,4\}$	$\{3,4\}$
1	1,-1	1,-1	1,-1	0,0	0,0	0,0
2	1,-1	-1,1	-1,1	1,-1	1,-1	-1,1
3	0,0	1,-1	0,0	1,-1	0,0	1,1
4	-1,1	-1,1	1,-1	-1,1	1,-1	1,-1

TABLE 2.2 – Tableau des gains d'un jeu sans équilibre de Nash

2.3 Polytope des indépendants et des bases d'un matroïde

Définition 10 (Vecteur caractéristique). Soit $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ un ensemble et $S \subset E$. Le vecteur $\mathbf{x}_S := (x_1, \dots, x_n)$ défini par :

$$\begin{cases} x_i = 1 & \text{si } e_i \in S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est appelé *vecteur caractéristique de S* .

Définition 11 (Polytope des indépendants, polytope des bases). Soit $\mathcal{M}$ un matroïde d'ensemble d'indépendants $\mathcal{I}$ et d'ensemble de bases $\mathcal{B}$. Le *polytope des indépendants* $P_{\mathcal{I}}$ (respectivement *polytope des bases* $P_{\mathcal{B}}$) de $\mathcal{M}$ est l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques des ensembles indépendants (respectivement des bases) de M .

Définition 12 (Enveloppe supérieure d'un polytope). Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un polytope. On appelle *enveloppe supérieure de P* l'ensemble

$$P^\uparrow := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in P, x \leq z\}$$

où $x \leq z$ est une inégalité composante par composante.

Remarque 4. On a évidemment $P \subset P^\uparrow$.

Notations. Pour x un vecteur de $\mathbb{R}^{|E|}$ et $U \subset E$, on note $x(U)$ la quantité $\sum_{e \in U} x_e$. En particulier, $x(e) = x_e$.

Théorème 4. Soit $P_{\mathcal{B}}$ le polytope des bases d'un matroïde sur E . Alors

$$P_{\mathcal{B}}^\uparrow = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid \forall U \subset E, x(E \setminus U) \geq r(E) - r(U)\}$$

2.4 Stratégies optimales pour le jeu sur les bases d'un matroïde

Le Théorème 2 énonce qu'il existe un équilibre de Nash pour le jeu sur les bases des matroïdes lorsqu'on l'étend aux stratégies mixtes. L'objectif de cette section est d'expliciter les stratégies optimales des deux joueurs et de donner la valeur du jeu correspondante.

Théorème 5. Soit $\mathcal{M} = (E, \mathcal{B})$ un matroïde d'ensemble de bases $\mathcal{B}$ avec $|E| = n$. Soit $\mathcal{J}$ le jeu sur les bases de M , avec les notations du Théorème 3 et s^* un profil stratégique mixte correspondant à un équilibre de Nash. Soit $p = (\frac{1}{d(e_1)}, \dots, \frac{1}{d(e_n)})$, $q = (\frac{c(e_1)}{d(e_1)}, \dots, \frac{c(e_n)}{d(e_n)}) \in \mathbb{R}^n$, $e_1, \dots, e_n \in E$. Alors :

$$\Pi_A(s^*) = \min\{\mu \mid (\mu \cdot p + q) \in P_{\mathcal{B}}^\uparrow\}$$

Démonstration. Soit δ une stratégie mixte de D (c'est à dire que δ est une distribution de probabilité sur $\mathcal{B}$). Soit e un élément de E choisi par A . Le gain de A est alors :

$$\sum_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ e \in B}} \delta(B)(d(e) - c(e)) - \sum_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ e \notin B}} \delta(B)c(e) = d(e) \cdot \left(\sum_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ e \in B}} \delta(B) \right) - c(e).$$

Comme le jeu est à somme nulle, l'objectif de D est de minimiser le gain maximum de A (voir Remarque 2). Posons $b(e) = \sum_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ e \in B}} \delta(B)$ pour tout $e \in E$ et $b = (b(e_1), \dots, b(e_n))$ le vecteur correspondant de $\mathbb{R}^n$. Alors b est un vecteur de $P_{\mathcal{B}}$. En effet, les valeurs $\delta(B)$ pour $B \in \mathcal{B}$ forment les coefficients d'une combinaison convexe et on peut associer à chaque B son vecteur caractéristique $\mathbf{x}_B$. On peut donc écrire $b = \sum_{B \in \mathcal{B}} \delta(B) \mathbf{x}_B$. Ces observations justifient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \Pi_A(s^*) &= \min\{\mu \mid \exists b \in P_{\mathcal{B}}, d(e) \cdot b(e) - c(e) \leq \mu, \forall e \in E\} \\ &= \min\{\mu \mid \exists b \in P_{\mathcal{B}}, b \leq \mu \cdot p + q\} \end{aligned}$$

D'après la Définition 12, on a :

$$\Pi_A(s^*) = \min\{\mu \mid (\mu \cdot p + q) \in P_{\mathcal{B}}^{\uparrow}\}$$

□

Corollaire 6. Posons $G = \Pi_A(s^*)$. Soit $b \in P_{\mathcal{B}}$ tel que $b \leq G \cdot p + q$. Soit $\sum_{B \in \mathcal{B}} \lambda_B \mathbf{x}_B$ l'expression de b comme combinaison convexe des $\mathbf{x}_B$. Soit $\delta^*(B) = \lambda_B$. Alors quelque soit la stratégie mixte α de A , la stratégie mixte δ^* est une stratégie optimale pour le joueur D , au sens où $\Pi_A(\alpha, \delta^*) \leq G$.

Démonstration. Si $b \leq G \cdot p + q$, alors $\forall e \in E, b(e) \leq G \cdot p(e) + q(e)$, c'est à dire $b(e) \cdot d(e) - c(e) \leq G$. De $b(e) = \sum_{B \in \mathcal{B}} \lambda_B \mathbf{x}_B$ avec $\mathbf{x}_B = 1$ si $e \in B$ et $\mathbf{x}_B = 0$ sinon (par définition de $\mathbf{x}_B$), on tire

$$\forall e \in E, d(e) \cdot \left(\sum_{\substack{B \in \mathcal{B} \\ e \in B}} \lambda_B \right) - c(e) \leq G.$$

Donc, si α est une stratégie mixte de A , alors :

$$\Pi_A(\alpha, \delta^*) \leq G.$$

□

Proposition 7.

$$\Pi_A(s^*) = \max_{\substack{U \subseteq E \\ U \neq E}} \frac{r(E) - r(U) - q(E \setminus U)}{p(E \setminus U)}$$

Démonstration. Cela découle du Théorème 4, puisque $(\mu \cdot p + q) \in P_B^\uparrow$ si et seulement si :

$$\forall U \subset E, \mu \cdot p(E \setminus U) + q(E \setminus U) \geq r(E) - r(U).$$

Le minimum de ces μ est donc égal au maximum des $\frac{r(E) - r(U) - q(E \setminus U)}{p(E \setminus U)}$ pour $U \subsetneq E$. $\square$

Corollaire 8.

$$val(\mathcal{J}) = \left| \max_{U \subsetneq E} \frac{r(E) - r(U) - q(E \setminus U)}{p(E \setminus U)} \right|$$

Démonstration. Par la Définition 7, $val(\mathcal{J}) = |\Pi_A(s^*)|$. $\square$

Proposition 9. *En reprenant les notations du Théorème 5, soit $U \subsetneq E$ tel que U maximise $\frac{r(E) - r(U) - q(E \setminus U)}{p(E \setminus U)}$. Soit :*

$$\alpha^*(e) = \begin{cases} \frac{p(e)}{p(E \setminus U)} & \text{si } e \in E \setminus U \\ 0 & \text{si } e \in U \end{cases}$$

Alors, quelque soit la stratégie mixte δ de D , la stratégie mixte α^ est une stratégie optimale pour le joueur A , au sens où $\Pi_A(\alpha^*, \delta) \geq \Pi_A(s^*)$.*

Démonstration. Soit B une base choisie par D . Par définition, l'espérance de gain de A est :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in B \setminus U} \frac{p(e)}{p(E \setminus U)} [d(e) - c(e)] - \sum_{e \in (E \setminus B) \setminus U} \frac{p(e)}{p(E \setminus U)} c(e) = \\ \sum_{e \in B \setminus U} \frac{p(e)}{p(E \setminus U)} d(e) - \sum_{e \in E \setminus U} \frac{p(e)}{p(E \setminus U)} c(e) = \end{aligned}$$

en utilisant $p(e)d(e) = 1$ et $p(e)c(e) = q(e)$

$$\frac{|B \setminus U|}{p(E \setminus U)} - \frac{q(E \setminus U)}{p(E \setminus U)} \geq \frac{r(E) - r(U) - q(E \setminus U)}{p(E \setminus U)}$$

qui est bien égal à $\Pi_A(s^*)$ d'après la Proposition 7. $\square$

Théorème 10. *Le profil stratégique mixte (α^*, δ^*) est un équilibre de Nash du jeu sur les bases d'un matroïde.*

Démonstration. Cela découle du Corollaire 6, de la Proposition 9 et de la Définition 5. $\square$

Illustration sur l'Exemple 4

En reprenant les données de l'Exemple 4, on va chercher à déterminer un équilibre de Nash pour les stratégies mixtes. Les vecteurs p et q sont respectivement égaux à $(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ et $(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$. Commençons par déterminer la valeur du jeu v . Le Corollaire 8 nous dit qu'il faut trouver un sous ensemble U de E qui maximise la quantité $\frac{r(E) - r(U) - q(E \setminus U)}{p(E \setminus U)}$. On vérifie qu'en prenant $U = \emptyset$, on obtient le maximum désiré : $v = \frac{1}{3}$. La Proposition 9 donne une stratégie optimale pour A : $\alpha(1) = \frac{1}{3}, \alpha(2) = \frac{1}{6}, \alpha(3) = \frac{1}{3}, \alpha(4) = \frac{1}{6}$. Soit $z = vp + q$. D'après le Théorème 5, $z \in P_{\mathcal{B}}^{\uparrow}$, et une stratégie mixte optimale de D est donnée, d'après le Corollaire 6, par les coefficients dans l'expression du vecteur z comme combinaison convexe des vecteurs caractéristiques des bases de $U_{2,4}$. Ces vecteurs sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\{1,2\}} &= (1, 1, 0, 0) \\ \mathbf{x}_{\{1,3\}} &= (1, 0, 1, 0) \\ \mathbf{x}_{\{1,4\}} &= (1, 0, 0, 1) \\ \mathbf{x}_{\{2,3\}} &= (0, 1, 1, 0) \\ \mathbf{x}_{\{2,4\}} &= (0, 1, 0, 1) \\ \mathbf{x}_{\{3,4\}} &= (0, 0, 1, 1) \end{aligned}$$

et on a :

$$z = \frac{1}{3}\mathbf{x}_{\{1,2\}} + \frac{1}{3}\mathbf{x}_{\{2,4\}} + \frac{1}{3}\mathbf{x}_{\{3,4\}}$$

ce qui donne une stratégie mixte optimale pour D en prenant $\delta(\{1,2\}) = \delta(\{2,4\}) = \delta(\{3,4\}) = \frac{1}{3}$ et $\delta(B) = 0$ pour toutes les autres bases B . Le profil stratégique mixte (α, δ) est donc un équilibre de Nash.

Remarque 5. Dans cet exemple, z appartient même à $P_{\mathcal{B}}$.

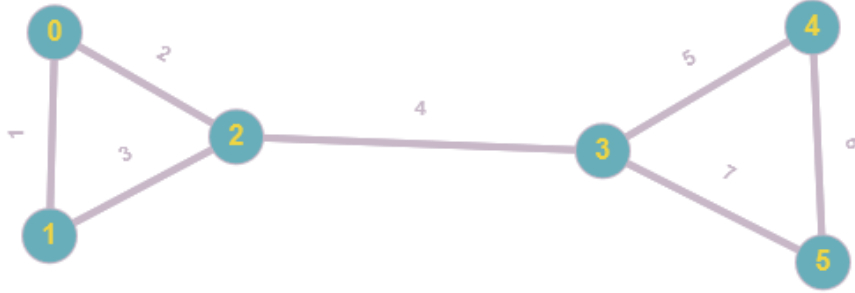
2.5 Application : réseau de communication

Dans un réseau de communication, différentes entités (par exemple des villes) sont reliés entre elles par des connexions (par exemple des routes). Un tel réseau se modélise par un graphe où les sommets sont les entités et les connexions sont les arêtes. Considérons la situation suivante : d'une part, un gestionnaire du réseau sélectionne comme infrastructure une partie des connexions, la plus petite possible, de sorte que toute entité soit accessible à partir de toute autre entité (cela revient à choisir un arbre couvrant du graphe) ; d'autre part, un attaquant (qui ne connaît pas l'infrastructure choisie) cherche à déconnecter cette infrastructure en rendant inopérante une des

connexions, une action pour laquelle il doit payer un coût. La question est de déterminer une stratégie optimale pour les deux protagonistes.

Exemple 5. Soit un réseau dont la modélisation est donnée par le graphe en Figure 2.1. Le jeu sur les bases d'un matroïde permet de répondre à la

FIGURE 2.1 – Illustration d'un réseau. Le coût de l'attaquant est égal à 1 pour chaque arête.



question. Soit E l'ensemble des arêtes du graphe donné en Figure 2.1 et $\mathcal{B}$ l'ensemble de ses arbres couvrants. Il est bien connu que $\mathcal{M} := (E, \mathcal{B})$ est un matroïde dans lequel $\mathcal{B}$ est l'ensemble des bases. Pour toute arête $e \in E$, on fixe $c(e) = 1$ et $d(e) = 1$ (l'attaquant n'a pas de préférence). Les vecteurs p et q sont égaux et valent $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Commençons par déterminer la valeur du jeu grâce au Corollaire 8 : le rang de E est 5, et pour tout sous-ensemble $U \subset E$, $p(E \setminus U) = q(E \setminus U) = |E| - |U|$. On remarque alors que la quantité :

$$\frac{5 - r(U) - |E| + |U|}{|E| - |U|}, U \subsetneq E$$

est maximisée par l'ensemble $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$, ce qui nous donne une valeur pour le jeu de 0. Ainsi, l'attaquant est dissuadé de jouer (ce qui peut s'interpréter comme une bonne notion de réseau *sécurisé*). Remarquons au passage que ce ne serait pas le cas avec un coût sur les arêtes nul (la valeur du jeu étant alors de 1). La stratégie optimale de l'attaquant est donc d'après la Proposition 9 : $\alpha(4) = 1$ et $\alpha(e) = 0$ pour tout $e \neq 4$, c'est à dire la stratégie pure qui consiste à jouer l'arête 4. C'est cohérent avec la structure du matroïde : l'arête 4 est un isthme de $(E, \mathcal{B})$, c'est à dire qu'elle appartient à toutes les bases. Il en découle que toute stratégie mixte du défenseur est une stratégie optimale.

Remarque. On peut remarquer que le vecteur $0 \cdot p + q = (1, 1, 1, 1, 1, 1) \notin P_{\mathcal{B}}$.

Exemple 6. Examinons un autre réseau dont le graphe G est donné en Figure 2.2. Soit E l'ensemble des arêtes de G , $\mathcal{B}$ l'ensemble de ses arbres couvrants et on note $\mathcal{M} = (E, \mathcal{B})$ le matroïde associé. Pour toute arête $e \in E$, on fixe

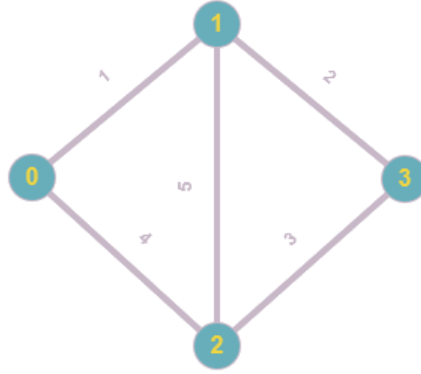
$c(e) = 1$ et $d(e) = 1$, les vecteurs p et q sont égaux et valent $(1, 1, 1, 1, 1)$, le rang du matroïde est 3. On calcule la valeur du jeu. La quantité

$$\frac{3 - r(U) - |E| + |U|}{|E| - |U|}, U \subsetneq E$$

est maximisée pour $U = \emptyset$, pour une valeur du jeu de $\frac{2}{5}$. La stratégie optimale de l'attaquant est la distribution de probabilité uniforme sur l'ensemble des arêtes, c'est à dire jouer chaque arête avec probabilité $\frac{1}{5}$. Le vecteur $z := \frac{2}{5}p + q$ est égal à $\frac{7}{5}(1, 1, 1, 1, 1) \geq \mathbf{x}_B$ pour toute base B . Cela implique que toute stratégie mixte est une stratégie optimale pour le défenseur.

Remarque. On remarque qu'à nouveau $z \notin P_{\mathcal{B}}$.

FIGURE 2.2 – Un autre exemple de réseau de communication.



2.6 Approche algorithmique

Dans [9], il est dit :

As it is covered by many introductory textbooks on linear programming, every two-player zero-sum game given by its payoff matrix is solvable in polynomial time via linear programming. Obviously, this is not a viable option in case of the Matroid Base Game since the number of the Defender's possible choices (that is, the number of bases of M) is typically exponential in $|S|$ which makes the size of the payoff matrix also exponential.

Nous détaillons ici le sens de l'expression "typically exponential" et ses implications. Tous les résultats sur les comparaisons asymptotiques sont issus de [4]. Soit $\mathcal{M} = (E, \mathcal{B})$ un matroïde dont $\mathcal{B}$ est l'ensemble de bases et E a pour cardinal n . De l'équicardinalité des bases on tire la majoration suivante :

$$|\mathcal{B}| \leq \binom{n}{r(E)}$$

Proposition 11. *Soit $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$. Lorsque n tend vers l'infini, on a les comparaisons asymptotiques suivantes :*

Cas I : $k = o(n)$

$$\log_2 \binom{n}{k} = (1 + o(1))k \log_2 \frac{n}{k}$$

Dans ce cas, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est sous-exponentiel en n .

Cas II : $k = \Omega(n)$

$$\log_2 \binom{n}{k} = (1 + o(1)) \left(\frac{k}{n} \log_2 \frac{n}{k} + \frac{n-k}{n} \log_2 \frac{n}{n-k} \right) n$$

Dans ce cas, le coefficient binomial est exponentiel en n .

Ainsi, pour de grandes valeurs de n , la taille du programme linéaire est dans le pire des cas exponentielle en n , ce qui rend sa résolution par un programme linéaire inefficace. Le théorème suivant est alors utile :

Théorème 12. *Soit $(\mathcal{M}) := (E, \mathcal{B})$ un matroïde dont $\mathcal{B}$ est l'ensemble de bases, $d, c \in \mathbb{Q}^E$. Si on suppose que l'appartenance à une base d'un élément $e \in E$ peut être vérifiée en temps constant, alors il existe un algorithme qui calcule la valeur du jeu sur les bases de $\mathcal{M}$ et une stratégie optimale pour chacun des deux joueurs en $O(|E|^{10})$.*

Nous avons choisi de ne pas traiter cet algorithme car le grand nombre d'opérations, même sur de petits exemples, le rend impossible à illustrer.

Remarque 6. On pourrait chercher à affiner l'analyse de la résolution par programmation linéaire en utilisant les outils de la complexité paramétrée, où l'enjeu serait de déterminer une fonction f telle que la résolution par programmation linéaire se fasse dans l'ordre de $f(k) \cdot n^{O(1)}$ opérations.

2.7 Question d'interprétation géométrique

Reprenons les notation du Théorème 5. Soit μ la valeur du jeu sur les bases de $\mathcal{M}$. Une stratégie optimale pour le défenseur est donnée par la décomposition comme combinaison convexe des vecteurs caractéristiques des bases de $\mathcal{M}$ d'un vecteur $b \in P_{\mathcal{B}}$ tel que $b \leq \mu \cdot p + q$. Il y a deux cas possibles :

1. $\mu \cdot p + q \in P_{\mathcal{B}}$, c'est le cas que nous avons rencontré dans l'Exemple 4.
2. $\mu \cdot p + q \notin P_{\mathcal{B}}$, c'est le cas que nous avons rencontré dans les Exemples 5 et 6.

Dans chacun de ses cas, on peut déterminer une stratégie optimale par un algorithme polynomial. On pourrait chercher des conditions sur les paramètres du jeu pour que le vecteur $\mu \cdot p + q$ appartienne au polytope des bases, ainsi que les conséquences sur les résultats de théorie des jeux.

Chapitre 3

Jeu de congestion

3.1 Définition

Nous utilisons dans cette section les définitions de [13] et [2].

Définition 13 (Jeu de congestion). Soit n un entier naturel, R un ensemble de cardinal ρ (ensemble de *ressources*) et pour tout, $j \in R$, soit $c_j : \{1, \dots, n\} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction réelle croissante (fonction de *coût*). Un *jeu de congestion* est un jeu où l'ensemble des joueurs est $\{1, \dots, n\}$; l'ensemble des stratégies S_i du joueur i est un ensemble de parties non vides de R . Si $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ est un profil stratégique, pour $j \in R$ on note $n_j(s)$ la quantité $\sum_{i=1}^n \chi_{s_i}(j)$. Informellement, $n_j(s)$ est, dans le profil stratégique s , le nombre de joueurs qui ont choisi une partie de R dont j est un élément. Enfin, la fonction de *coût total* du joueur i est :

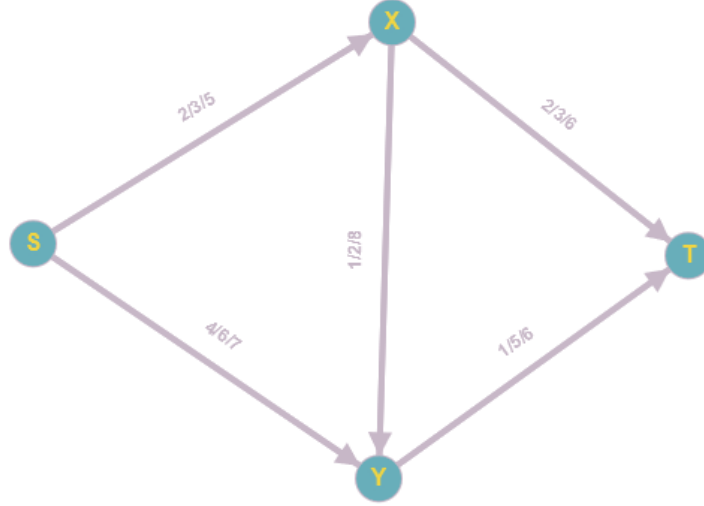
$$\begin{aligned} u_i : S &\mapsto \mathbb{R} \\ s &\mapsto \sum_{j \in s_i} c_j(n_j(s)) \end{aligned}$$

Exemple 7. On considère le graphe donné en Figure 3.1. L'ensemble des joueurs est $\{1, 2, 3\}$, l'ensemble R est l'ensemble des arêtes du graphe. Les arêtes sont labellisées par la fonction de coût associé : par exemple, l'arête SX coûte 2 si elle est choisie par un joueur, 3 si choisie par deux joueurs et 5 si choisie par trois joueurs. Le but des joueurs est d'aller du sommet S au sommet T (en minimisant leur coût total), l'ensemble des stratégies est donc l'ensemble des chemins de S à T .

Remarque. Il est plus intuitif de parler de « coûts » et de chercher à les minimiser, mais on peut très facilement se ramener à la définition classique des jeux en posant pour chaque joueur i la fonction de gains $g_i := -u_i$. Minimiser u_i revient à maximiser g_i et on retombe alors sur les notions classiques d'équilibre de Nash.

Théorème 13 (Rosenthal, 1973). *Tout jeu de congestion admet un équilibre de Nash en stratégies pures.*

FIGURE 3.1 – Exemple d'un jeu de congestion



Considérons l'extension suivante des jeux de congestion :

Définition 14 (Jeux de congestion joueur-spécifique). Un *jeu de congestion joueur-spécifique* est un jeu de congestion où pour chaque ressource j , chaque joueur i a une fonction de coût $c_j^i : \{1, \dots, n\} \mapsto \mathbb{R}$ qui lui est propre. La fonction de coût total du joueur i s'exprime alors ainsi :

$$\begin{aligned} u_i : S &\mapsto \mathbb{R} \\ s &\mapsto \sum_{j \in s_i} c_j^i(n_j(s)). \end{aligned}$$

Le Théorème 13 n'est alors plus vrai en général : il existe des jeux de congestion joueur-spécifique qui n'admettent pas d'équilibre de Nash en stratégies pures. Nous allons exposer dans la suite de cette section le résultat suivant : dans un jeu de congestion, si l'ensemble des stratégies S_i du joueur i est l'ensemble des bases d'un matroïde sur l'ensemble des ressources, alors le jeu admet un équilibre de Nash en stratégies pures.

3.2 Jeu de congestion joueur-spécifique sur les matroïdes

Définition 15 (Jeu de congestion joueur-spécifique sur les matroïdes). Soit $\mathcal{J} := \langle J, R, (S_1, \dots, S_n), (c_1^1, \dots, c_r^1, \dots, c_r^n) \rangle$ un jeu de congestion joueur-spécifique. On dit que $\mathcal{J}$ est un *jeu de congestion joueur-spécifique sur les matroïdes* si, pour tout i , il existe un matroïde M_i sur R dont l'ensemble des bases est S_i .

Lemme 14. Soit E un ensemble, $M = (E, \mathcal{I})$ un matroïde sur E et $k \geq 0$. Soit

$$\mathcal{I}_k := \{X \in \mathcal{I} : |X| \leq k\}$$

Alors, $\mathcal{I}_k$ est l'ensemble des indépendants d'un matroïde sur E (appelé k -truncation de M).

Démonstration. Il est évident que $\emptyset \in \mathcal{I}_k$. Soit $B \in \mathcal{I}_k$ et $A \subset B$. On a $A \in \mathcal{I}$ par définition des indépendants et évidemment $|A| \leq |B|$. Enfin, soit $I_1, I_2 \in \mathcal{I}_k$, $|I_1| < |I_2|$. Par définition des indépendants, il existe $e \in I_2 \setminus I_1$ tel que $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$. On a : $|I_1 \cup e| = |I_1| + 1 < |I_2| + 1 < k + 1$. Donc $|I_1 \cup e| \leq k$. $\square$

Lemme 15. Soit E un ensemble, $M = (E, \mathcal{I})$ un matroïde sur E , $w : E \mapsto \mathbb{N}$ une fonction de poids et B^* une base de M de poids minimum. Si le poids de $r \in B^*$ est augmenté de sorte que B^* ne soit plus de poids minimum, alors on peut obtenir une base de poids minimum en prenant $r' \in E$ de poids minimum tel que $B^* \cup \{r'\} \setminus \{r\}$ soit une base.

Remarque. Une démonstration de ce lemme (amélioration de l'algorithme glouton) peut être trouvée dans [2].

Théorème 16. Soit $\mathcal{J}$ un jeu de congestion joueur spécifique sur les matroïdes. Alors, $\mathcal{J}$ admet un équilibre de Nash en stratégies pures.

Démonstration. On reprend les notations de la Définition 15 et pour tout $i \in J$ on note $r(M_i)$ le rang du matroïde M_i . Comme l'ensemble des stratégies de chaque joueur i est l'ensemble des bases de M_i , chaque stratégie de i a le même cardinal $r(M_i)$. Dans la suite, on représente la stratégie du joueur i comme $r(M_i)$ jetons que le joueur place sur les ressources qu'il utilise. Chaque ressource utilisée dans R par i est représentée par un unique jeton. Remarquons que si l'on réduit le nombre de jetons du joueur i , par exemple il n'utilise que $k_i \leq r(M_i)$ jetons, alors le Lemme 14 nous permet d'affirmer que son ensemble de stratégies reste l'ensemble des bases d'un matroïde, plus particulièrement de la k_i -truncation de M_i . On effectue une preuve par récurrence sur la quantité $\tau = \sum_{i \in J} r(M_i)$.

Initialisation Lorsque $\tau = 0$, chaque joueur a pour unique stratégie l'ensemble vide. Il y a donc un unique profil stratégique qui correspond trivialement à un équilibre de Nash.

Hérédité Supposons maintenant que chaque joueur i a placé $k_i \leq r(M_i)$ jetons, avec $\tau = \sum_{i \in J} k_i$ et que ce placement correspond à un équilibre de Nash dans le jeu $\mathcal{J}_\tau = \langle J, R, (S_i^{k_i})_{i \in J}, (c_j^i)_{i \in J, j \in R} \rangle$, où les ensembles de stratégies $S_i^{k_i}$ sont les ensembles des bases des k_i -truncation des M_i . On montre qu'on peut construire un équilibre de Nash dans le jeu $\mathcal{J}_{\tau+1}$ où un

joueur i_0 a reçu un jeton supplémentaire. Par un algorithme glouton, on trouve une base optimale en rajoutant à une base de la k_{i_0} -truncation de M_{i_0} un élément r_0 de coût minimal. Autrement dit, une stratégie optimale pour le joueur i_0 consiste à poser son jeton supplémentaire sur la ressource r_0 et laisser ses autres jetons inchangés. À présent, les joueurs qui ont aussi posé un jeton sur r_0 (et seulement eux) peuvent reconsidérer leur choix (car la fonction de coût sur les ressources est croissante). Soit i_1 l'un de ces joueurs, et s_{i_1} sa stratégie dans le jeu J_τ . Par hypothèse de récurrence, cette stratégie est de coût minimum parmi toutes les autres stratégies. On peut alors appliquer le Lemme 15 : i_1 obtient une meilleure stratégie dans le jeu $J_{\tau+1}$ en déplaçant son jeton de r_0 vers une ressource r_1 telle que $s_{i_1} \cup \{r_1\} \setminus \{r_0\}$ soit une base de la k_{i_1} -truncation de M_{i_1} et de poids minimal pour cette propriété. Si on a un équilibre de Nash, on s'arrête, sinon seuls les joueurs ayant un jeton sur r_1 peuvent être incités à changer leur stratégie. On identifie alors un tel joueur i_2 et on applique à nouveau le Lemme 15, et on continue ce procédé.

Terminaison et validité du procédé Pour conclure la preuve, il faut montrer que le procédé de déplacement des jetons termine et qu'il débouche sur un équilibre de Nash. Soit s un profil stratégique. Pour tout joueur i et $r \in R$, notons $D_i(r)$ le coût du joueur i sur r si r possède un jeton en plus que dans s , c'est à dire $D_i(r) = c_r^i(n_r(s) + 1)$. Si durant le procédé un joueur i déplace un jeton d'une ressource r vers une ressource r' , alors on a $D_i(r) > D_i(r')$. Chaque jeton ne peut donc être placé sur une ressource qu'au plus une fois. Si on note $k^* = \max\{k_i + 1 \mid i \in J\}$, il y a au plus $n \times k^*$ jetons, donc il y a au plus $n \times k^* \times \rho$ déplacements, ainsi le procédé termine. De plus, il débouche nécessairement sur un équilibre de Nash, car le Lemme 15 assure que les stratégies obtenues dans $J_{\tau+1}$ sont de coût minimum. $\square$

Remarque. Remarquons que cette preuve construit effectivement un équilibre de Nash en temps polynomial.

Un exemple de jeu congestion joueur-spécifique sur les matroïdes

Exemple 8. Soit $J = \{A, B, C\}$, $R = \{1, 2\}$, $\forall i \in J, S_i = \{E \subset R : |E| = 1\}$, et soit les coûts suivants :

- $c_1^A(1) = 0, c_1^A(2) = 5, c_1^A(3) = 9$
- $c_1^B(1) = 2, c_1^B(2) = 3, c_1^B(3) = 7$
- $c_1^C(1) = 0, c_1^C(2) = 5, c_1^C(3) = 9$
- $c_2^A(1) = 2, c_2^A(2) = 3, c_2^A(3) = 7$
- $c_2^B(1) = 0, c_2^B(2) = 5, c_2^B(3) = 9$
- $c_2^C(1) = 2, c_2^C(2) = 3, c_2^C(3) = 7$

Ces paramètres décrivent un jeu de congestion joueur-spécifique sur les matroïdes ; en l'occurrence, chaque joueur a pour ensemble de stratégie l'ensemble des bases du matroïde uniforme de rang 1 sur R .

Déroulement du jeu Détaillons le déroulement du jeu avec le principe des jetons.

- Le jeu est initialisé avec 0 jeton. Il s'agit d'un équilibre de Nash trivial.
- Le joueur A reçoit un jeton, qu'il place sur la ressource de coût minimum pour lui, c'est à dire la ressource 1. C'est un équilibre de Nash.
- Le joueur B reçoit un jeton. Il le place sur la ressource 2, puisque $c_2^B(1) < c_1^B(2)$. C'est un équilibre de Nash.
- Le joueur C reçoit un jeton. On a $c_1^C(2) > c_2^C(2)$, donc le joueur C place son jeton sur la ressource 2. Ce n'est pas un équilibre de Nash, car le joueur B est incité à changer sa stratégie.
- Comme $c_1^B(2) < c_2^B(2)$, le joueur B déplace son jeton sur la ressource 1. Ce n'est pas un équilibre de Nash car le joueur A est incité à changer sa stratégie.
- Comme $c_2^A(2) < c_1^A(2)$, le joueur A déplace son jeton sur la ressource 2. Aucun joueur n'est plus incité à changer de stratégie, on a donc un équilibre de Nash.

3.3 Jeu de congestion étendus aux polymatroïdes

Les jeux de congestion peuvent être étendus à une structure plus générale que les matroïdes, appelée polymatroïde. Dans cette section, nous détaillons surtout comment le cas particulier d'un jeu de congestion sur les matroïdes émerge d'un jeu de congestion sur les polymatroïde.

3.3.1 Définition

On utilise ici la définition d'un polymatroïde issue de [5]. Les autres définitions proviennent de [7]. Soit E un ensemble fini et $r : \mathcal{P}(; E) \mapsto \mathbb{N}$. La fonction r est la fonction rang d'un matroïde sur E si et seulement si elle vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $\forall e \in E, r(\{e\}) \leq 1$
- (ii) $r(\emptyset) = 0$
- (iii) Pour tous $A, B \subseteq E, A \subseteq B \Rightarrow r(A) \leq r(B)$
- (iv) Pour tous $A, B \subseteq E, r(A) + r(B) \geq r(A \cup B) + r(A \cap B)$

On obtient un polymatroïde en ne supposant plus (i).

Définition 16 (Polymatroïde). Un *polymatroïde* est la donnée d'un ensemble fini E et d'une fonction $p : \mathcal{P}(E) \mapsto \mathbb{N}$ qui vérifie les propriétés (ii),(iii) et (iv).

Exemple 9. Soient $(E, r_1), \dots, (E, r_n)$ n matroïdes donnés avec leurs fonctions rang. On définit la fonction p de la façon suivante :

$$\forall U \subseteq E, p(U) = \sum_{i=1}^n r_i(U)$$

Le couple (E, p) est un polymatroïde sur E . En effet :

$$p(\emptyset) = \sum_{i=1}^n r_i(\emptyset) = 0$$

Pour $A \subseteq B \subseteq E$ on a :

$$p(A) = \sum_{i=1}^n r_i(A) \leq \sum_{i=1}^n r_i(B) = p(B)$$

Et pour tous $A, B \subseteq E$ on a :

$$\begin{aligned} p(A) + p(B) &= \sum_{i=1}^n r_i(A) + \sum_{i=1}^n r_i(B) \\ &\geq \sum_{i=1}^n r_i(A \cup B) + r_i(A \cap B) \\ &= p(A \cup B) + p(A \cap B) \end{aligned}$$

Définition 17 (Polyèdre à base entière d'un polymatroïde). Soient $d \in \mathbb{N}$, un ensemble fini non vide et $\mathcal{P} := (E, p)$ un polymatroïde, on appelle polyèdre à base entière de $\mathcal{P}$ l'ensemble :

$$\mathcal{B}_p(d) := \{x \in \mathbb{N}^E : x(U) \leq p(U) \text{ pour tout } U \subset E, x(E) = d\}$$

Définition 18 (Fonction fortement semi-convexe). Une fonction $c : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ est dite *fortement semi-convexe* si pour tout $x, y, a, b \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq x \leq y$ et $a \leq b$, on a :

$$c(a+x)x - c(a+x-1)(x-1) \leq c(b+y)y - c(b+y-1)(y-1). \quad (3.1)$$

Pour un entier $\mu \geq 1$, on dit que c est μ -tronquée si l'inégalité 3.1 ne doit être vérifiée que pour $1 \leq x \leq y \leq \mu$.

3.3.2 Jeu de congestion joueur-spécifique sur les polymatroïdes

Définition 19 (Jeu de congestion joueur-spécifique sur les polymatroïdes). Soient $N := \{1, \dots, n\}$ un ensemble de joueurs, $R := \{1, \dots, \rho\}$ un ensemble de ressources. Pour tout $i \in N$, soit $d_i \in \mathbb{N}$, $d_i \geq 1$ et $p_i : \mathcal{P}(R) \mapsto \mathbb{N}$ une fonction telle que (R, p_i) soit un polymatroïde. Pour tout $i \in N, r \in R$, soient $c_{i,r} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ des fonctions de coût fortement semi-convexes $p_i(r)$ -tronquées et croissantes. Pour tout $i \in N$, l'ensemble des stratégies S_i de i est $\{U \subset E \mid \mathbf{x}_U \in \mathbf{B}_{p_i}(d_i)\}$. Ces paramètres définissent un jeu de congestion joueur-spécifique sur les polymatroïdes (R, p_i) .

Lemme 17. Soit M un matroïde sur un ensemble E et $P_{\mathcal{B}}$ son polytope des bases. On a la caractérisation suivante de $P_{\mathcal{B}}$:

$$P_{\mathcal{B}} = \{x \in \mathbb{R}^E \mid x(U) \leq r(U) \forall U \subset E, x(E) = r(E), x(e) \geq 0 \forall e \in E\}$$

Le Lemme 17 correspond au Corollaire 40.2d de [8].

Proposition 18. Si, pour tout i , p_i est la fonction rang d'un matroïde M_i sur R et si $d_i = p_i(R)$, alors un jeu de congestion joueur-spécifique sur les polymatroïdes (R, p_i) est un jeu de congestion joueur-spécifique sur les matroïdes.

Démonstration. Il s'agit de montrer que l'ensemble des stratégies S_i est égal à l'ensemble des bases $\mathcal{B}_i$ de M_i . Montrons $\mathcal{B}_i \subset S_i$. Soit $B \in \mathcal{B}_i$, alors par définition $\mathbf{x}_B \in P_{\mathcal{B}_i}$. Or $\mathbf{x}_B \in \mathbb{N}^R$. Par le Lemme 17, on a de plus pour tout $U \subset R$, $\mathbf{x}_B(U) \leq p_i(U)$ et $\mathbf{x}_B(R) = p_i(R)$. Par conséquent, $\mathbf{x}_B \in \mathbf{B}_{p_i}(p_i(R))$, d'où $B \in S_i$. Réciproquement, montrons $S_i \subset \mathcal{B}_i$. Soit $X \in S_i$. On a pour tout $U \subset R$, $\mathbf{x}_X(U) \leq p_i(U)$ et en particulier $\mathbf{x}_X(X) \leq p_i(X)$. Or $\mathbf{x}_X(X) = |X|$, donc $|X| \leq p_i(X)$. Comme par propriété du rang, $|X| \geq p_i(X)$, on a $|X| = p_i(X)$, d'où X est un indépendant. Par ailleurs, $\mathbf{x}_X(R) = p_i(R)$, et encore une fois, $\mathbf{x}_X(R) = |X|$. Ainsi $p_i(X) = |X| = p_i(R)$, donc X est un indépendant maximal, c'est à dire $X \in \mathcal{B}_i$. Donc $S_i = \mathcal{B}_i$. $\square$

Théorème 19. Les jeux de congestion joueur-spécifique sur les polymatroïdes définis dans la Définition 19 admettent un équilibre de Nash en stratégies pures.

Une preuve de ce théorème se trouve dans [7].

Bibliographie

- [1] *Théorie des jeux*. Number 46 in Bibliothèque Tangente. 2013.
- [2] Heiner Ackermann, Heiko Röglin, and Berthold Vöcking. Pure nash equilibria in player-specific and weighted congestion games. *Theoretical Computer Science*, 410 :1552–1563, Avril 2009.
- [3] Giacomo Bonanno. *Game Theory*. 2ème edition, 2018.
- [4] Shagnik Das. A brief note on estimates of binomial coefficients.
- [5] Michel Gondra and Minoux Michel. *Graphes et algorithmes*, chapter 9, pages 493–494. Tec & Doc, 4 edition, 2009.
- [6] Assane Gueye, Jean Walrand, and Venkat Anantharam. Network topology design game : How to choose communication links in an adversarial environment ? 04 2011.
- [7] Tobias Harks, Max Klimm, and Britta Peis. Resource congestion on integral polymatroid.
- [8] Alexander Srijver. *Combinatorial Optimization*, volume B. Springer, 2004.
- [9] Dávid Szegedy. Security games on matroids. *Mathematical Programming*, (161) :347–364, 2017.
- [10] Wikipédia. Jeu à somme nulle — wikipédia, l’encyclopédie libre, 2020. [En ligne ; Page disponible le 14-mai-2020].
- [11] Wikipédia. Théorème du minimax de von neumann — wikipédia, l’encyclopédie libre, 2020. [En ligne ; Page disponible le 5-mai-2020].
- [12] Wikipedia contributors. Game theory — Wikipedia, the free encyclopedia, 2020. [Online ; accessed 12-June-2020].
- [13] Nir Yoser and Ami Koren. Congestion and potential games.